БРОЈ π И ФИБОНАЧИЈЕВИ БРОЈЕВИ

Леонардо Фибоначи (богати италијански трговац), упознао је у XIII веку Европу са радовима Идијско – Арапских математичара (а тиме посредно и кинеских). Написао је књигу о рачунању у децималном систему (“ књига о абаку ”) у којој је разматрао и ред који је по њему добио име, Фибоначијев ред, а чији су чланови

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 …

односно

F(1) = 1	F(5) = 5
F(2) = 1	F(6) = 8
F(3) = 2	F(7) = 13
F(4) = 3	F(8) = 21

итд.

Као што се види, његови чланови имају свјство да је, осим прва два, сваки од њих једнак збиру претходна два члана:

$$F(n) = F (n - 1) + F(n - 2)$$

Фибоначијев низ је најједноставнија врста рекурзионог низа. Количник два узастопна члана Фибоначијевог низа када природни број n тежи бесконачности даје вредност фундаменталног броја златног пресека

$$\frac{F(n)}{F(n-1)} = PHI = 1{,}6180339$$

Истражићемо везу између чланова Фибоначијевог низа и фундаменталног броја π. Да би смо то урадили искористићемо познату тригонометријску чињеницу да је

$$\mathrm{tg}\,\pi / 4 = 1$$

односно

$$\mathrm{arctg}\,1 = \pi / 4$$

Полазећи од познате формуле за tanges збира 2 угла

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

извешћемо релацију за збир arcus tanges – a. Нека је

$$\alpha+\beta=arctg(1/x)$$
$$\alpha=arctg(1/x+1)$$
$$\beta=arctgt$$

Заменом ових израза у горњу формулу за tanges збира, добијамо

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{x+1}+t}{1-\frac{t}{x+1}}$$

Израчунавамо t као

$$t = 1/(x^2 + x + 1)$$

односно долазимо до важне формуле

$$actg(\frac{1}{x}) = arctg(\frac{1}{x+1}) + arctg(\frac{1}{x^2+x+1})$$

Сада ћемо се вратити проблему коришћења Фибоначијевих бројева и израчунавању броја π. Узимајући за вредност x - а редом 1, 3, 4 имамо

$$arctg1 = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}$$

Заменом добијамо

$$arctg\frac{1}{3} = arctg\frac{1}{4} + arctg\frac{1}{13}$$

$$arctg\frac{1}{4} = arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{1}{21}$$

тј.

$$arctg1 = arc\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{5} arctg\frac{1}{13} + arctg\frac{1}{21}$$

$$\pi = 4 * (arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{1}{13} + arctg\frac{1}{21})$$

односно долазимо до везе између броја π и неких Фибоначијевих бројева

$$\pi = 4*[arctg\frac{1}{F(3)} + arctg\frac{1}{F(5)} + arctg\frac{1}{F(7)} + arctg\frac{1}{F(8)}]$$

Користећи формулу за tangens збира два угла можемо сличним поступком доказати ваљаност читавог низа формула:

$$arctg\frac{1}{x} = arctg\frac{1}{x+1} + arctg\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$arctg\frac{1}{x} + arvtg\frac{1}{x+2} + arctg\frac{1}{x^2+2x+1}$$
$$arctg\frac{1}{x} = arctg\frac{1}{x+3} + arctg\frac{1}{x^2+3x+1}$$

итд.

па се исправно може предподставити да важи општа формула

$$arctg\frac{1}{x} = arctg\frac{1}{x+n} + arctg\frac{1}{x^2+nx+1}$$

где је n природан број. Помоћу горњих формула израчунавамо:

$$arctg\frac{1}{1} = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}$$

$$arctg\frac{1}{3} = arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{1}{8}$$

$$arctg\frac{1}{8} = arctg\frac{1}{13} + arctg\frac{1}{21}$$

$$arctg\frac{1}{21} = arctg\frac{1}{34} + arctg\frac{1}{55}$$

што указује на постојање опште релације

$$arctg\frac{1}{F(2n)} = actg\frac{1}{F(2n+1)} + arctg\frac{1}{F(2n+2)}$$

Ако то претпотставимо можемо поново користити формулу за тангенс збира два угла:

$$\frac{1}{F(2n)} = \frac{\frac{1}{F(2n+1)} + \frac{1}{F(2n+2)}}{1 - \frac{1}{F(2n+1)\cdot F(2n+2)}}$$

из чега произилази једнакост

$$F(2n)\cdot[F(2n+2)+F(2n+1)]=F(2n+1)\cdot F(2n+2)-1$$

знајући да је

$$F(2n+2)=F(2n+1)+F(2n)$$

имамо

$$F^2(2n)+F(2n)F(2n+1)=F^2(2n+1)-1$$

Решавањем ове квадратне једначине налазимо да је

$$F(2n+1)=\frac{1}{2}\cdot(F(2n)+\sqrt{5\cdot F(2n)+4})$$

аналогно

$$F(2n+2)=\frac{1}{2}\cdot(F(2n+)+\sqrt{5\cdot F(2n)-4})$$

где је n = 1, 2, 3, …
што нам омогућава да одредимо наредни члан Фибоначијевог низа не знајући предходни.

Лако је сада доказати да у граничном процесу количник два узастопна Фибиначијева броја јесте вредност златног пресека. Наиме

$$LimF(2n) \to \infty$$
$$n \to \infty$$

Из горњих формула имамо:

$$\frac{F(2n+1)}{F(n)} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5 - \frac{4}{\infty}}) = Phi$$
$$\frac{F(2n+2)}{F(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5 - \frac{4}{\infty}}) = Phi$$

Полазећи од релација

$$actg\frac{1}{F(2)} = arctg\frac{1}{F(3)} + arctg\frac{1}{F(4)}$$
$$arctg\frac{1}{F(4)} = arctg\frac{1}{F(5)} + arctg\frac{1}{F(6)}$$
$$arctg\frac{1}{F(6)} = arctg\frac{1}{F(7)} + arctg\frac{1}{F(8)}$$

итд.

За вредност броја π добијамо

$$\pi = 4 \cdot (arctg\frac{1}{F(3)} + arctg\frac{1}{F(5)} + ... + arctg\frac{1}{F(2n+1)} + ...$$

односно

$$\pi = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{F(2n+1)}$$

На крају да напоменемо да из предходних формула произилази читав низ формула за број π, као например

$$\pi = 4 \cdot (arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{1}{8})$$