

1,1,2,3,5,8,13,21,34...

Fibonaccijev niz & broj Phi

1 61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179

Andrej Novak

Sadržaj:**Ime cjeline****Broj stranice****1. Uvod u pojmove**

| | |
|---|-----------|
| 1.1 Što znači zlatni rez (phi, PHI) u elementarnoj geometriji? | 4 |
| 1.1.1 Izvod formule za zlatni rez | 5 |
| 1.1.2 Dokaz valjanosti i obrana relacije za zlatni rez | 6 |
| 1.1.3 Konstrukcija točke koja dijeli dužinu u omjeru jednakom phi tj. zlatnom rezu bez poznavanja postupka izvađanja formule | 6 |
| 1.2 Uvod u Fibonaccijevih brojeva | 8 |
| 1.3 Uvod u Pascalov trokut i osnove numeričkih trokuta | 8 |
| 1.4 Lucasovi brojevi | 11 |

2. Fibonacci, Pascal

| | |
|---|-----------|
| 2.1 Primjena Pascalovog trokuta | 12 |
| 2.2 Dobivanje Fibonaccijevog niza iz Pascalovog trokuta | 13 |
| 2.3 Fibonaccijevi brojevi | 14 |
| 2.3.1 Fibonaccijevi brojevi, rekurzivan niz | 14 |
| 2.3.2 Veza Lucasovih i Fibonaccijevih brojeva | 16 |
| 2.3.3 Binetova formula za dobivanje Fibonaccijevih brojeva | 18 |
| 2.3.4 Zbrajanje i oduzimanje m-tog i n-tog člana Fibonaccijevog niza ... | 20 |
| 2.3.5 Množenje m-tog i n-tog člana Fibonaccijevog niza | 20 |
| 2.3.6 Neki algebarski identiteti Fibonaccijevog niza | 21 |
| 2.3.7 Identiteti sume za Fibonaccijev niz | 22 |
| 2.3.8 Honsbergerovi, Catalan, d'Ocagnes, Cassini, Gelin-Casáro, kvadratni te nasljednikov izrazi za Fibonaccijev niz | 23 |
| 2.3.9 Fibonaccijev kvadrat i krivulja | 24 |
| 2.4 Fibonacci je svuda oko nas | 25 |

3. Božanska proporcija, zlatni broj, ključ života, ključ svega!

| | |
|--|-----------|
| 3.1 Božanska proporcija | 27 |
| 3.1.1 Zanimljiva svojstva broja Phi te izvod vrijednosti | 29 |
| 3.1.2 Racionalni prikaz broja PHI | 30 |
| 3.1.3 Prikaz broja Phi sa Fibonaccijevim brojevima kao koeficijentima | 31 |
| 3.1.4 Phi likovi i krivulje | 35 |
| 3.2 Fibonaccijevi brojevi i izvod temeljnog svojstva broja Phi | 35 |
| 3.2.1 Pojednostavljenje Binetove formule | 36 |
| 3.3 Zaključak | 37 |

Recenzent;

Prof. Vedrana Kaciga

© Andrej Novak 2005. Sva prava pridržana!

1.0 Uvod

Oduvijek me zanimala svaka pravilnost u prirodi, svaka povezanost i sve nadnaravno pa čak i ono za što se često kaže "iznad čovjekovih shvaćanja", pri tome ne mislim na Boga već na zakone koji su ljudskom mentalnom sklopu neshvatljivi i nepojmljivi. Ovaj rad kroz sebe uglavnom proteže četiri glavne niti; Pascalov trokut, Fibonaccijeve brojeve, Lucasove brojeve i Phi. Sve teme su jako zanimljive same po sebi, no kada se povežu jedna s drugom stvar postane puno više nego samo zanimljivo.

U prvoj cjelini nalaze se definicije i objašnjenja pojmova koji će biti korišteni za daljnje proučavanje i dokazivanje.

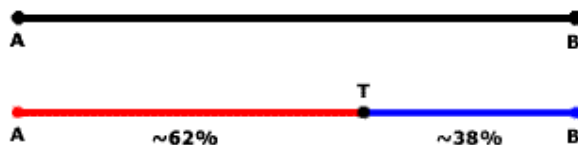
Druga cjelina opisuje korisne primjene Pascalovog trokuta a kasnije pokušava objediniti i povezati sva ova tri pojma sa jedinstvenom formulom tj. formulama.

Treća cjelina istražuje prisutnost zlatnog broja u nama, oko nas, u našoj prošlosti i tamo gdje ćemo ići u budućnosti.

1.1 Što znači zlatni rez (phi, PHI) u elementarnoj geometriji?

PHI (Φ) = 1.61803398874989...

"Fi" ili na engleskom "fly" spada u grupu iracionalnih brojeva baš kao π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i sl. PHI je poseban zbog svojih neobičnih matematičkih osobnosti. PHI nalazimo svakodnevno u životu, dizajnu, graditeljstvu, estetici, ekonomiji, fizici, matematici, svemiru...



Ako neku dužinu \overline{AB} podijelimo na dva djela točkom T , tako da je

$|AB| : |AT| = |AT| : |BT|$ kažemo da su oni u zlatnom rezu.

Supstituirajmo sada;

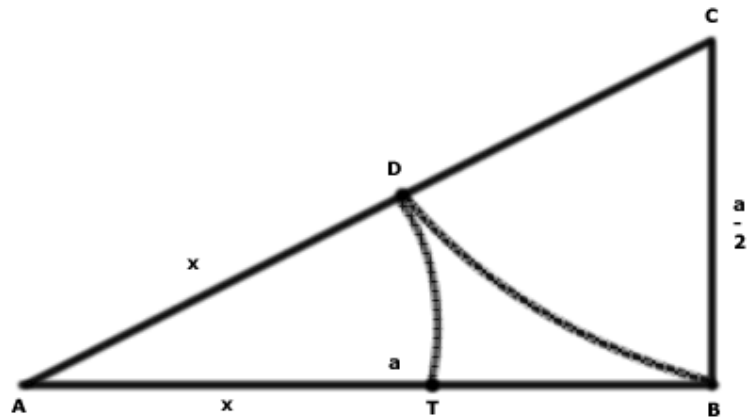
$$\begin{aligned} x &= |AT| \\ a &= |AB| \end{aligned}$$

I dobivamo

$$a : x = x : (a-x)$$

Ili kada riješimo omjer

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \frac{x}{a-x} \\ a(a-x) &= x^2 \end{aligned}$$

1.1.1 Izvod formule za zlatni rez

Promotrite sliku poviše, zaključujete, prvo moramo dobiti iznos dužine |AC|

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Kako bi dobili x iznosu stranice |AC| moramo oduzeti $\frac{a}{2}$, dakle

$$|AC| = x + \frac{a}{2}$$

Uvrstimo iznos dužine |AC|

$$\frac{a}{2}\sqrt{5} = x + \frac{a}{2}$$

iz toga slijedi da je

| |
|---|
| Relacija 1. $x = a * \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ |
|---|

ili

| |
|---|
| Relacija 2. $x = a * \text{phi}$ |
|---|

Ove dvije relacije su uvjet za zlatni rez, zlatni omjer ili božansku proporciju!

1.1.2 Dokaz valjanosti i obrana relacije za zlatni rez!

Neka je

$$a=2$$

uvrštanjem u relaciju 1. dobivamo vrijednost

$$x = 1,2360679774...$$

Iz prve relacije

$$a : x = x : (a-x)$$

stoga je

$$\frac{a}{x} = 1,61803398874989....$$

no iz relacije 2. možemo primijetiti

$$\text{phi} = \frac{x}{a} = 0.61803398874989....$$

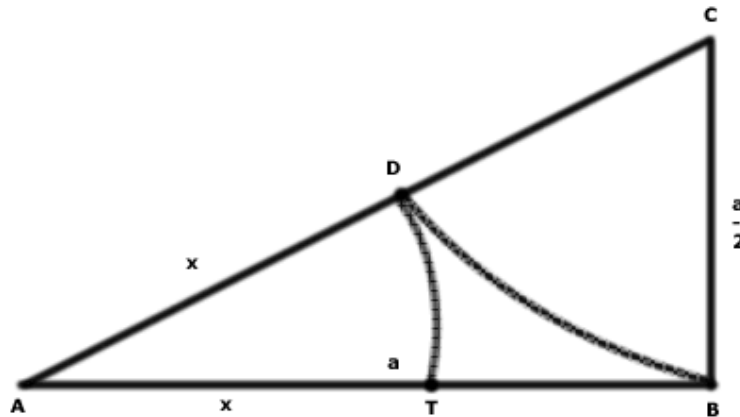
Ovaj broj je poznat kao malo phi ili PHI - 1.

1.1.3 Konstrukcija točke koja dijeli dužinu u omjeru jednakom PHI tj. zlatnom rezu bez poznavanja postupka izvođenja formule

Dana je dužina \overline{AB} koju dijelimo točkom T u zadanom omjeru.

Rasčlanimo izraz za zlatni rez

$$x = a \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$



Na dužinu \overline{AC} se prenese dužina \overline{BC} , pa pošto je

$$|BC| = \frac{a}{2}$$

preko Pitagorinog poučka

$$|AC| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

dobije se x prema gornjoj relaciji!

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2}$$

Nakon što smo dobili x na dužini \overline{AC} prenijeli smo ga šestarom na stranicu trokuta dužine a i time na stranici trokuta \overline{AB} dobili x i a .

1.2 Uvod u Fibonaccijeve brojeve

Fibonaccijevi brojevi ili kako ih često nazivamo Fibonaccijev niz su brojevi, zapravo, vrsta rekurzivnog niza u kojem suma dva prethodna daje slijedeći broj. Niz je nazvan prema Leonardu Fibonacciju (1175g.) koji je otkrio ove neobične osobnosti niza, no nije sigurno da je on u potpunosti shvatio svoje otkriće i njegovu povezanost s brojem PHI (o toj vezi u trećoj cjelini).

Ovako izgleda niz;

| Oznaka člana u nizu | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | A ₇ | A ₈ | A ₉ | A ₁₀ | A ₁₁ | A... |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|------|
| Fibonaccijev niz | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | ... |

Dakle za poznavanje niza najvažnija su prva dva člana niza A₁ i A₂ jer već treći član se može dobiti iz relacije;

$$A_3 = A_1 + A_2$$

1.3 Uvod u Pascalov trokut i numeričke trokute

Numeričke trokute čine nizovi brojeva sa nekom zajedničkom pravilnošću. Npr.

```

1
1 1
1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1 1

```

Ako zbrojimo svaki red dobivamo

```

1           = 1
1 1        = 2
1 1 1      = 3
1 1 1 1    = 4
1 1 1 1 1  = 5

```

Svaka jedinica bi trebala predstavljati točku. Probajmo sada s malo drugačijim trokutom.

```

1           = 1
1 2        = 3
1 2 3      = 6
1 2 3 4    = 10
1 2 3 4 5  = 15

```

Zbroj svakog reda rezultira s brojevima koji su na prvi pogled ne povezani, međutim primijetite kako postoji pravilnost, razlika između svakog prethodnog broja je za jedan manja od slijedećega. Tako je između broja jedan i tri razlika dva, već između slijedećeg para, brojeva tri i šest razlika je tri.

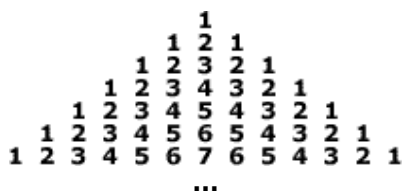
Prethodni trokut, mogli smo i ovako napisati

```

1           = 1
2 1        = 3
3 2 1      = 6
4 3 2 1    = 10
5 4 3 2 1  = 15

```

**Kako preko numeričkog trokuta prikazati kvadrate svih prirodnih brojeva?
Promotrite...**



Zbroj svakog reda daje rezultate, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,...

U istraživanju i pripremi materijala, jednu večer igrajući se s brojevima naišao sam na jedan zanimljiv numerički trokut, pogledajte o čemu je riječ.

| | |
|----------------------|-------|
| 1 | = 1 |
| 1 2 | = 3 |
| 2 3 4 | = 9 |
| 4 5 6 7 | = 22 |
| 7 8 9 10 11 | = 45 |
| 11 12 13 14 15 16 | = 81 |
| 16 17 18 19 20 21 22 | = 133 |
| ... | |

Dobili smo jedan nepravilan niz, međutim ako sada oduzmemo svaki broj sume (1, 3, 9, 22, 45, 81, 133) na ovaj način

| | |
|----------|------|
| 3 - 1 | = 2 |
| 9 - 3 | = 6 |
| 22 - 9 | = 13 |
| 45 - 22 | = 23 |
| 81 - 45 | = 36 |
| 133 - 81 | = 52 |

Mogli smo mi oduzimati s modulom, apsolutnom vrijednosti npr.

| | |
|--------|------|
| 1 - 3 | = 2 |
| 3 - 9 | = 6 |
| 9 - 22 | = 13 |
| ... | |

Imamo sada novi niz, koji je ovaj puta smislen, vidite pravilnost?

2, 6, 13, 23, 36, 52...

Ne vidite?

Ponovit ću prethodni korak samo ovaj puta na ovom, novo dobivenom nizu.

| | |
|---------|------|
| 2 - 6 | = 4 |
| 6 - 13 | = 7 |
| 13 - 23 | = 10 |
| 23 - 36 | = 13 |
| 36 - 52 | = 16 |

To je taj niz, 4, 7, 10, 13, 16! Primjećujete da se svaki slijedeći uveća za tri od prethodnoga? Međutim ako bi i to napisali brojevima dobili bi slijedeće

| | |
|---------|-----|
| 4 - 7 | = 3 |
| 7 - 10 | = 3 |
| 10 - 13 | = 3 |

$$|13 - 16| = 3$$

Opća formula za n-ti član niza

$$A_n = 3 + A_{n-1}$$

Promotrimo slijedeći trokut!

```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

```

Ovakav trokut zove se Pascalov trokut. Dobio je ime po Francuskom matematičaru Blaiseu Pascalu rođenom 19.06.1623. godine u Clermontu u Francuskoj, a umro je 19.8.1662. godine u Parizu. Obitelj Pascal, glava obitelji Etienne i njegovo četvero djece, 1632. godine preselila je u Pariz. Otac nije dao mladom Blaiseu da uči matematiku sve dok ne navrší 15 godina, pa je matematičke knjige uklonio iz kuće. Znatiželja izazvana tim činom navela je Blaisea da u dobi od 12 godina počne samostalno proučavati geometriju. Nedugo zatim otkrio je da zbroj kutova u trokutu iznosi dva prava kuta. Kada je njegov otac doznao za sinovo otkriće, dopustio mu je da proučava Euklidovu geometriju. Već sa 16 godina predstavlja nekoliko svojih radova iz područja projektivne geometrije. Kasnije, 1654, Fermatu je predstavio osnove za teoriju vjerojatnosti, koja mu je bila posebno važna jer je uživao u kockanju. Razmatrani problem bio je problem kocke a glasi; "koliko puta moramo baciti par kocaka prije nego možemo očekivati par šestica".

Pascalov trokut je povezan sa Fibonaccijevim brojevima, a veliku ulogu ima i u određivanju iznosa binomnih koeficijenata u razvoju binoma.

Kako se konstruira trokut?

Sam postupak je jako jednostavan, na sam vrh stavi se jedinca, potom dvije jedinice, zapamtimo da jedinice simboliziraju obrub tj. točku! U trećem redu stavimo jedinicu na početak, te zbrojimo one dvije dvice iz prethodnog reda te sa jedinicom zatvorimo red. Četvrti red se dobiva na istom principu, počnemo red s jedinicom zbrojimo jedinicu i dvicu iz prethodnog reda (trećeg reda) te rezultat tri zapišemo potom zbrojimo dvicu i jedinicu iz prethodnog (trećeg reda) te rezultat opet zapišemo i red zatvorimo sa jedinicom. Postupak se ponavlja dok god je potrebno!

Promotrimo sumu svakog reda Pascalovog trokuta

```

1                = 1   = 20
1 1              = 2   = 21
1 2 1            = 4   = 22
1 3 3 1          = 8   = 23
1 4 6 4 1        = 16  = 24
1 5 10 10 5 1    = 32  = 25
...              ...

```

Obratite pažnju i uočite da je suma svakog reda zapravo neka potencija broja dva!

1.4 Lucasovi brojevi

Fransis Edouard Anatol Lucas je rođen 4. travnja 1842. godine u Francuskoj, gdje se i obrazovao. Radio je kao profesor matematike na Lycée Saint Louis – Pariz, prije u Parizu u promatračnici a tijekom rata kao oružar. Najpoznatiji je po svojim rezultatima u području teorije brojeva. Dokazao je da je broj $2^{127} - 1$ prosti broj. Proučavao je Fibonaccijev niz brojeva. Lucasovi brojevi dobivaju se na istom principu kao i Pascalovi, samo što počinju od 2 i 1. Pa niz izgleda.

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76 ...

Kako se nulti član u Fibonaccijevom nizu ne uzima u obzir tako se često to radi i sa ovim nizom, tako negdje zna pisati da Lucasov niz izgleda ovako

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76 ...

Usporedba Fibonaccijevog i Lucasovog niza.

| Oznaka člana u nizu | A ₀ | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | A ₇ | A ₈ | A ₉ | A ₁₀ | A _{...} |
|------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| Fibonaccijev niz (F _n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | ... |
| Lucasov niz (L _n) | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | ... |

Za Lucasov niz također vrijedi formula rekurzivnosti

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

2.0 Fibonacci, Pascalov trokut**2.1 Primjena Pascalovog trokuta**

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomni poučak objašnjava način na koji se može riješiti bilo kakvi binomni član, neovisno koliko velika potencija bila.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Za ovu temu nije posebno bitno što se odvija u eksponentu pojedinog člana, bitni su binomni koeficijenti (brojevi uz svaki član u razvijenom obliku). U izrazu

$$(a + b)^3 = \underline{1}a^3 + \underline{3}a^2b + \underline{3}ab^2 + \underline{1}b^3$$

binomni koeficijenti su 1, 3, 3, 1.

Dok su u izrazu

$$(a + b)^4 = \underline{1}a^4 + \underline{4}a^3b + \underline{6}a^2b^2 + \underline{4}ab^3 + \underline{1}b^4$$

to brojevi 1, 4, 6, 4, 1.

Odakle su vam poznati ovi brojevi?

To su brojevi iz Pascalovog trokuta!

```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

```

Dakle Pascalov trokut možemo i drugačije prikazati

$$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$$

...

2.2 Dobivanje Fibonaccijevog niza iz Pascalovog trokuta

```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

```

Već smo upoznati sa Pascalovim trokutom, međutim tada nije bila spomenuta činjenica koja objašnjava povezanost Fibonaccijevog niza i Pascalovog trokuta. Promotrite sliku;

```

  1
 1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

```

Dijagonalnim zbrajanjem brojeva iz Pascalovog trokuta dobivamo Fibonaccijev niz.

```

      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

```

Ovo je također Pascalov trokut, samo je raspored brojeva u estetskom smislu promijenjen.

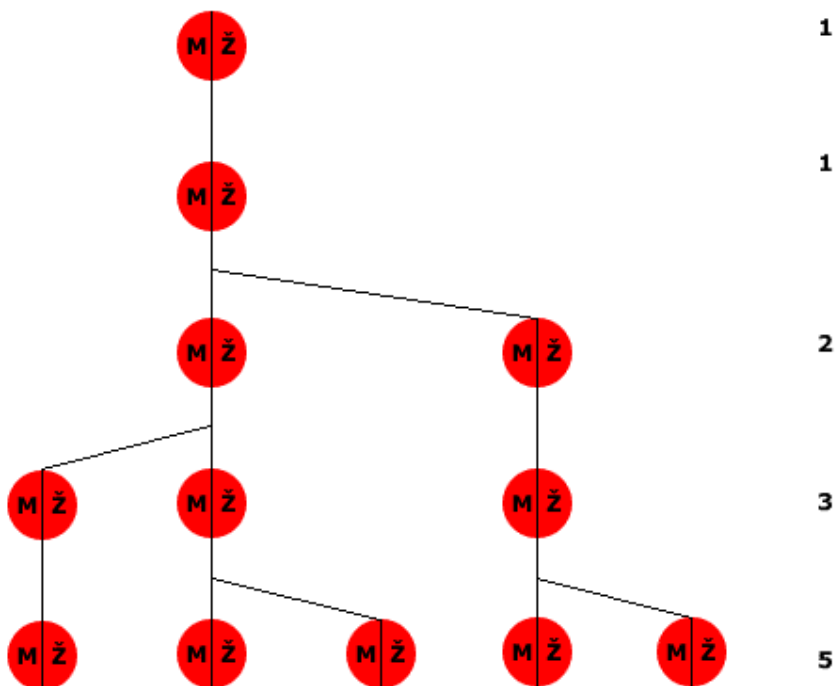
2.3 Fibonaccijevi brojevi

$$[0,] 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (F_n)^2 = (F_n) * (F_{n+1})$$

Poznati Fibonaccijev problem, "Ako par zečeva stavimo u izolirani prostor, te oni nakon mjesec dana dostižu spolnu zrelost i novi par se rađa. Koliko će pari zečeva biti u tom prostoru nakon jedne godine i 8 mjeseci, ako uzmemo da nije niti jedan uginuo."

Odgovor se nalazi, naravno, u samom nizu. Promotrite ilustraciju.



2.3.1 Fibonaccijev niz, rekurzivan niz.

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Tako ako dobijemo pitanje koliki je 21. član Fibonaccijevog niza ako 22. član iznosi 17711, te 20. je 6765?

Jednostavno, dobijemo iz relacije

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

No što ako dobijemo pitanje, koliki je 17. član u Fibonaccijevom nizu ako je 13. član u nizu 233, 14. član niza 377 te ako 15. član niza iznosi 610?

- Jasno, prvo bi našli 16. član niza, pa potom zbrojili 15. i 16.

Međutim, lako je kada se radi o maloj razlici između članova. Što kada bi imali 13., 14., 15. član a tražio bi se 24.?

Tu bi bilo dosta više računanja.

Vratimo se prethodnom primjeru i zapišimo ga jezikom matematike.

$$F_{13} = 233$$

$$F_{14} = 377$$

$$F_{15} = 610$$

F_{15} je dan u zadatku iako ga je moguće izvesti iz prethodna dva koja su također poznata.

$$F_{15} = F_{14} + F_{13}$$

Dakle F_{16} je

$$F_{16} = F_{15} + F_{14}$$

A F_{17} je

$$F_{17} = F_{16} + F_{15}$$

Budući sa su nam poznati samo 13., 14., 15., član preko njih moramo iskazati 17. član.

U formulu za F_{17} uvrstimo ekvivalente za F_{16} i F_{15} .

$$F_{17} = F_{14} + F_{13} + F_{15} + F_{14}$$

$$F_{17} = F_{15} + 2F_{14} + F_{13}$$

Ili opća formula

$$F_{(n+2)} = 1F_{(n)} + 2F_{(n-1)} + 1F_{(n-2)}$$

Uzmimo slijedeći slučaj, poznat je 18., 19., 20., te 21. član, koliki je 24. člana Fibonaccijevog niza?

Prikažemo li problem kao i u prethodnom zadatku uvrštavanjem i iskazivanjem nepoznatog preko poznatog dobivamo slijedeći izraz

$$F_{(n+3)} = 1F_{(n)} + 3F_{(n-1)} + 3F_{(n-2)} + 1F_{(n-3)}$$

Primjećujete sličnost između ove i prethodne formule za opće formule?

Desna strana izraza ima formu kao binom u raspisu i to sa potencijom 2 i 3, a brojevi koji množe svaki član su brojevi iz Pascalovog trokuta (binomni koeficijenti). Promotrite par 'raspisa'.

$$F_{(n+0)} = 1F_{(n)}$$

$$F_{(n+1)} = 1F_{(n)} + 1F_{(n-1)}$$

$$F_{(n+2)} = 1F_{(n)} + 2F_{(n-1)} + 1F_{(n-2)}$$

$$F_{(n+3)} = 1F_{(n)} + 3F_{(n-1)} + 3F_{(n-2)} + 1F_{(n-3)}$$

$$F_{(n+4)} = 1F_{(n)} + 4F_{(n-1)} + 6F_{(n-2)} + 4F_{(n-3)} + 1F_{(n-4)}$$

$$F_{(n+5)} = 1F_{(n)} + 5F_{(n-1)} + 10F_{(n-2)} + 10F_{(n-3)} + 5F_{(n-4)} + 1F_{(n-5)}$$

...

$$F_{(n+0)} \quad 1 \quad \quad \quad = 2^0$$

$$F_{(n+1)} \quad 1 \quad 1 \quad \quad \quad = 2^1$$

$$F_{(n+2)} \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad \quad \quad = 2^2$$

$$F_{(n+3)} \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad \quad \quad = 2^3$$

$$F_{(n+4)} \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad \quad \quad = 2^4$$

$$F_{(n+5)} \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \quad \quad \quad = 2^5$$

...

2.3.2 Veza Lucasovih i Fibonaccijevih brojeva

U poglavlju o osnovama Lucasovih brojeva u istu tablicu sam smjestio i Fibonaccijeve i Lucasove, pažljivi čitači su možda već primijetili osnovnu vezu, ukoliko niste, promotrite ponovo.

| Oznaka člana u nizu | A ₀ | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | A ₇ | A ₈ | A ₉ | A ₁₀ | A _{...} |
|------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| Fibonaccijev niz (F _n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | ... |
| Lucasov niz (L _n) | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | ... |

Primjećujete da A₅ i A₇ Fibonaccijevog niza zbrojeni daju A₆ Lucasovog niza?

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

Daljnijim izvođenjem zbrajanje četiri uzastopna broja iz Fibonaccijevog niza možemo zamijeniti sa dva uzastopna boja iz Lucasovog niza, i to

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} = L_{n+1} + L_{n+2}$$

Dokaz preko jednostavnog primjera;

$$n = 4$$

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} = 3 + 5 + 8 + 13 = \underline{29}$$

$$L_{n+1} + L_{n+2} = 11 + 18 = \underline{29}$$

Međutim, možemo i iz dva uzastopna broja iz Lucasovog niza dobiti slijedeći broj ali u Fibonaccijevom nizu, iz slijedeće relacije.

$$5 \cdot F_{n+2} = 1 \cdot L_n + 3 \cdot L_{n+1}$$

Uvrstimo vrijednosti za n=3;

$$5 \cdot 5 = 4 + 3 \cdot 7$$

Dobivamo da je

$$25 = 25, \text{ što je istina!}$$

Promotrite slijedeće relacije na istu temu

$$\begin{aligned} 5 \cdot F_{n+1} &= 2 \cdot L_n + 1 \cdot L_{n+1} \\ 5 \cdot F_{n+2} &= 1 \cdot L_n + 3 \cdot L_{n+1} \\ 5 \cdot F_{n+3} &= 3 \cdot L_n + 4 \cdot L_{n+1} \\ 5 \cdot F_{n+4} &= 4 \cdot L_n + 7 \cdot L_{n+1} \\ 5 \cdot F_{n+5} &= 7 \cdot L_n + 11 \cdot L_{n+1} \\ 5 \cdot F_{n+6} &= 11 \cdot L_n + 18 \cdot L_{n+1} \\ &\dots \end{aligned}$$

Koeficijenti koji množe svaki član s desne strane su brojevi iz Lucasovog niza. Slijedeće relacije predočuju način dobivanja nekog člana iz Lucasovog niza preko Fibonaccijevih brojeva.

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= 2 \cdot F_n + 1 \cdot F_{n+1} \\ L_{n+2} &= 1 \cdot F_n + 3 \cdot F_{n+1} \\ L_{n+3} &= 3 \cdot F_n + 4 \cdot F_{n+1} \\ L_{n+4} &= 4 \cdot F_n + 7 \cdot F_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{n+5} &= 7 * F_n + 11 * F_{n+1} \\L_{n+6} &= 11 * F_n + 18 * F_{n+1} \\&\dots\end{aligned}$$

Dokaz!

Neka je $n=6$ te preko Fibonaccijevog niza trebamo dobiti A_9 iz Lucasovog niza.

$$L_{n+3} = 3 * F_n + 4 * F_{n+1}$$

$$L_{n+3} = 3 * 8 + 4 * 13$$

$$L_{n+3} = 76$$

A_9 Lucasovog niza doista je 76!

Prethodne dvije konverzije možemo prikazati i sa općom formulom

$$5 * F_{(n+k)} = (L_{k-1}) * L_n + L_k * L_{n+1}$$

tj.

$$L_{(n+k)} = (L_{k-1}) * F_n + L_k * F_{n+1}$$

Kako možemo dobiti 5. član iz Lucasovog niza ako poznamo samo 2. i 3.?

Peti član je zbroj trećeg i četvrtog, dakle

$$A_5 = A_4 + A_3$$

A četvrti član je zbroj trećeg i drugog (koji su poznati)

$$A_4 = A_3 + A_2$$

Ako u formulu za peti član, četvrti član predstavimo kao zbroj trećeg i drugog dobivamo

$$A_5 = A_3 + A_2 + A_3$$

tj.

$$A_5 = 1 * A_2 + 2 * A_3$$

Ako se 5. član pokuša predstaviti samo preko 1. i 2. člana istim postupkom izvađanja dobiva se slijedeća formula

$$A_5 = 2 * A_1 + 3 * A_2$$

Krenemo li tako dalje, pojavljuje se zajednička karakteristika, tj. primjećuje se da svaki od koeficijenata koji množi član s desne strane je broj iz Fibonaccijevog niza. Promotrite sada za bilo koji n broj iz skupa prirodnih brojeva.

$$\begin{aligned}L_{n+2} &= 1 * L_n + 1 * L_{n+1} \\L_{n+3} &= 1 * L_n + 2 * L_{n+1} \\L_{n+4} &= 2 * L_n + 3 * L_{n+1} \\L_{n+5} &= 3 * L_n + 5 * L_{n+1}\end{aligned}$$

...
Ili preko opće formule

$$L_{n+k} = (F_{k-1}) * L_n + (F_k) * L_{n+1}$$

Zamijene li se Lucasovi brojevi s Fibonaccijevim

$$F_{n+2} = 1 * F_n + 1 * F_{n+1}$$

$$F_{n+3} = 1 * F_n + 2 * F_{n+1}$$

$$F_{n+4} = 2 * F_n + 3 * F_{n+1}$$

$$F_{n+5} = 3 * F_n + 5 * F_{n+1}$$

...

dobivamo relacije za izračun nekog člana na temelju par prethodnih.

$$F_{n+k} = (F_{k-1}) * F_n + (F_k) * F_{n+1}$$

Neke članove u Lucasovom nizu možemo dobiti na isti način kao što smo dobivali članove u Fibonaccijevom

$$F_{(n+0)} = 1F_{(n)}$$

$$F_{(n+1)} = 1F_{(n)} + 1F_{(n-1)}$$

$$F_{(n+2)} = 1F_{(n)} + 2F_{(n-1)} + 1F_{(n-2)}$$

$$F_{(n+3)} = 1F_{(n)} + 3F_{(n-1)} + 3F_{(n-2)} + 1F_{(n-3)}$$

Preko (binomnih) koeficijenata, brojeva iz Pascalovog trokuta, pa stvari onda izgledaju na slijedeći način

$$L_{(n+0)} = 1L_{(n)}$$

$$L_{(n+1)} = 1L_{(n)} + 1L_{(n-1)}$$

$$L_{(n+2)} = 1L_{(n)} + 2L_{(n-1)} + 1L_{(n-2)}$$

$$L_{(n+3)} = 1L_{(n)} + 3L_{(n-1)} + 3L_{(n-2)} + 1L_{(n-3)}$$

$$L_{(n+4)} = 1L_{(n)} + 4L_{(n-1)} + 6L_{(n-2)} + 4L_{(n-3)} + 1L_{(n-4)}$$

$$L_{(n+5)} = 1L_{(n)} + 5L_{(n-1)} + 10L_{(n-2)} + 10L_{(n-3)} + 5L_{(n-4)} + 1L_{(n-5)}$$

...

2.3.3 Binetova formula za dobivanje Fibonaccijevih brojeva

Binetova formula za n-ti član Fibonaccijevog niza dobiva se rješavanjem rekurentnih jednačja. Pogledajmo izvod od početka;

$$\alpha + \beta = 1 \vee \alpha \cdot \beta = -1$$

$$a_{n+1} = (\alpha + \beta)a_n - \alpha \cdot \beta a_{n-1}$$

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1})$$

iz ovoga dobivamo cijeli niz jednakosti;

$$\begin{aligned}
a_{n-1} - \alpha a_n &= \beta(a_n - \alpha a_{n-1}) \\
&= \beta^2(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}) \\
&= \beta^3(a_{n-2} - \alpha a_{n-3}) \\
&\dots \\
&= \beta^{n-2}(a_3 - \alpha a_2) \\
&= \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \\
&= \beta^{n-1}(1 - \alpha).
\end{aligned}$$

ako svaku od gornjih jednakosti izjednačimo s posljednjom dobivamo;

$$\begin{aligned}
a_n - \alpha a_{n-1} &= \beta^{n-2}(1 - \alpha) \\
a_{n-1} - \alpha a_{n-2} &= \beta^{n-3}(1 - \alpha) \\
a_{n-2} - \alpha a_{n-3} &= \beta^{n-4}(1 - \alpha) \\
&\dots \\
a_3 - \alpha a_2 &= \beta(1 - \alpha) \\
a_2 - \alpha a_1 &= \beta^0(1 - \alpha)
\end{aligned}$$

Ako pomnožimo prvu jednakost s alpha na nultu, a drugu sa alpha na kvadrat, treću sa alpha na treću, preposljednju sa alpha na n-3, posljednju na alpha n-2;

$$\begin{aligned}
a_n - \alpha a_{n-1} &= \beta^{n-2}(1 - \alpha) \\
\alpha a_{n-1} - \alpha^2 a_{n-2} &= \alpha \beta^{n-3}(1 - \alpha) \\
\alpha^2 a_{n-2} - \alpha^3 a_{n-3} &= \alpha^2 \beta^{n-4}(1 - \alpha) \\
&\dots \\
\alpha^{n-3} a_3 - \alpha^{n-2} a_2 &= \alpha^{n-3} \beta(1 - \alpha) \\
\alpha^{n-2} a_2 - \alpha^{n-1} a_1 &= \alpha^{n-2} \beta^0(1 - \alpha)
\end{aligned}$$

Zbrojimo sada ove jednakosti;

$$a_n - \alpha^{n-1} = (1 - \alpha)(\alpha^0 \beta^{n-2} + \beta^{n-3} \alpha + \dots + \beta \alpha^{n-3} + \beta^0 \alpha^{n-2})$$

proširimo desnu stranu sa (alpha - beta);

$$\begin{aligned}
a_n + \alpha^{n-1} &= (1 - \alpha) \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}. \\
a_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.
\end{aligned}$$

Ukoliko se vratimo na početak i prisjetimo da smo brojeve alpha i beta odabrali kao rješenja jednadžbe imamo...

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vietéove formule.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Konačno dobivamo;

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

Ako probamo dokazati tvrdnju preko matematičke indukcije, uviđamo da ona vrijedi za n=1 i za n=0!

$$1 = \frac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{2^1 \sqrt{5}} \rightarrow 1=1 \quad ; \quad 0 = \frac{(1+\sqrt{5})^0 - (1-\sqrt{5})^0}{2^0 \sqrt{5}} \rightarrow 0=0$$

Tvrdnje smo ispitali za n=0 i n=1 kako bi u slijedećem redu mogli provesti dokaz. Za prvi slijedeći (n+1) tvrdnja također vrijedi!

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} + \frac{2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^n \sqrt{5}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n + 2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} [(1-\sqrt{5})+2] - (1-\sqrt{5})^{n-1} [(1-\sqrt{5})+2]}{2^n \sqrt{5}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} [3+\sqrt{5}] - (1-\sqrt{5})^{n-1} [3-\sqrt{5}]}{2^n \sqrt{5}} \end{aligned}$$

$(3 \pm \sqrt{5})$ možemo prikazati kao $(1 \pm \sqrt{5})^2 = 1 \pm 2\sqrt{5} + 5 = 6 \pm 2\sqrt{5} = 2(3 \pm \sqrt{5})$

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{2^{-1}(1+\sqrt{5})^{n-1} (1+\sqrt{5})^2 - 2^{-1}(1-\sqrt{5})^{n-1} (1-\sqrt{5})^2}{2^n \sqrt{5}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

2.3.4 Zbrajanje i oduzimanje m -tog i n -tog člana Fibonaccijevog niza

Ako je poznat 3. i 5. član, koliki je 8. član Fibonaccijevog niza?

Ako znamo 15. i 58. član Fibonaccijevog niza, koliki je 73. član Fibonaccijevog niza?

U prvom slučaju, možemo saznati i preko tablica, čak i na pamet možemo znati 8. član, međutim u drugom slučaju situacija je malo složenija.

Primjećujete da se radi o n -tom i m -tom članu u nizu, te se traži član koji je jednak $n+m$. Formula za taj slučaj je

$$F_{n+m} = \frac{1}{2}(F_n L_m + F_m L_n)$$

Riješimo prvi primjer

$$F_{3+5} = \frac{1}{2}(F_3 L_5 + F_5 L_3)$$

$$F_8 = \frac{1}{2}(2*11 + 5*4)$$

$$F_8 = \frac{1}{2} * 42 = 21$$

Osmi član u Fibonaccijevom nizu doista je 21!

Što ako je poznat 4. i 10. član niza, kako ćemo dobiti 6. član niza?

Uzmimo da je $n=4$, $m=10$, tada je $m-n=6$

$$F_{m-n} = \frac{1}{2}(-1)^n(F_m L_n - F_n L_m)$$

Uvrstimo vrijednosti sada

$$F_{10-4} = \frac{1}{2}(-1)^6(55*7 - 3*123)$$

$$F_6 = \frac{1}{2}*1*(385 - 369)$$

$$F_6 = 8$$

Što je istina!

2.3.5 Množenje m -tog i n -tog člana Fibonaccijevog niza

Uz poznati 3. i 5. član treba se dobiti koliki je 15. član Fibonaccijevog niza. Dakle, radi se o $n=3$, $m=5$ te $m*n=15$

Formula za umnožak indeksa, m -tog i n -tog člana glasi

$$F_{mn} = L_m F_{m(n-1)} - (-1)^m F_{m(n-2)}$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$F_{15} = 11*55 + 5$$

$$F_{15} = 610$$

Doista F_{15} Fibonaccijevog niza iznosi 610!

Što se tiče dijeljenja, član a_n djeljiv je članom a_m ako i samo ako je n djeljiv sa m

2.3.6 Neki algebarski identiteti Fibonaccijevog niza

Takozvani identitet dvostrukoga n .

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2$$

tj.

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$$

Nalaženje člana sa $3n$ uz poznavanje samo n .

$$F_{3n} = F_{n+1}^3 - F_n^3 + F_{n-1}^3$$

Evo još jednog

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2$$

Jednostavnim uvrštavanjem, dokazuje se valjanost izraza!

$n=5$

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2$$

$$8^2 = 4 \cdot 5 \cdot 3 + 2^2$$

$$64 = 64$$

Isto tako se i prethodnim izrazima na jednostavan način može dokazati točnost!

$n = 5$

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$$

$$F_{10} = 5(8 + 3)$$

$$F_{10} = 5 \cdot 11 = 55$$

Što doista i jest!

2.3.7 Identiteti sume za Fibonaccijev niz

Kolika je suma svih brojeva (k -brojeva) iz fibonaccijevog niza za neparne brojeve n počevši od 1?

Formula glasi

$$F_0 + F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2k+1} = F_{2k+2}$$

Tako da je k broj članova koje sumiramo - počinje od nule, kao i niz u prethodnom slučaju, da je član počeo od F_1 tada bi niz imao A_{k+1} članova.

Slična je situacija i za sumu svih n parnih brojeva odn. k članova.

$$1 + F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1}$$

Inače suma svih brojeva do nekog broja n se može izračunati po relaciji

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Uvrstimo brojeve u slučaj

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 &= F_{n+2} - 1 \\ 1 + 1 + 2 + 3 + 5 &= F_7 - 1 \\ F_7 - 1 &= 12 \end{aligned}$$

Istina!

Kako bi izračunali sumu prvih n kvadrata članova Fibonaccijevog niza od 1. do n-tog člana?

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Za ovaj niz koji počinje od n=0 možemo lijevu stranu i sa slijedećim izrazom zamijeniti

$$F_k F_{k+1}$$

Ili cijeli izraz predstaviti kao

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

Dokažimo formulu za sumu prvih n kvadrata članova Fibonaccijevog niza.

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Baza indukcije za n=1;

$$F_1^2 = F_1 F_{1+1} \Rightarrow F_1^2 = F_1 F_2$$

možemo ustvrditi da je baza indukcije završena jer su poznati iznosi prvog i drugog člana Fibonaccijevog niza, a to i dokazuje da je $1^2 = 1 * 1$.

Korakom indukcije provjerit ćemo da li tvrdnja vrijedi i za prvi slijedeći;

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 &= \\ F_{n+1}^2 + F_n F_{n+1} &= \end{aligned}$$

Izlučimo

$$F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) =$$

Iz formule za opći član Fibonaccijevog niza znamo da je $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ tj. član koji slijedi, ako to tako i zapišemo dobivamo;

$$F_{n+1} F_{n+2}$$

I time je dokaz proveden!

2.3.8 Honsbergerov, d'Ocagnes, Gelin-Casáro, Cassini, kvadratni te nasljednikov izrazi za Fibonaccijev niz

Svakako je vrijedno spomenuti postojanje ovih izraza.

➤ **Honsbergerove relacije**

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

$$F_{(k+1)n} = F_{n-1}F_{kn} + F_nF_{kn+1}$$

$$F_n = F_{(n+1)/2}^2 + F_{(n-1)/2}^2$$

➤ **D'Ocagenov identitet**

$$F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}$$

➤ **Celin-Casárov identitet**

$$F_n^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = 1$$

➤ **Cassinijev identitet**

Ukoliko u **Catalanijev identitet**

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_r^2$$

za r uvrstimo vrijednost 1, dobivamo **Cassinijev identitet**.

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

➤ **Kvadratni izraz**

$$F_n^2 = \frac{1}{5} [L_{2n} - 2(-1)^n]$$

➤ **Nasljednikov izraz (succ)**

$$F_{n+1} = \frac{1}{2}(F_n + L_n)$$

2.3.9 Fibonaccijev kvadrat i krivulja.

Kada bi konstruirali kvadrat od Fibonaccijevih brojeva, dakle prvi kvadrat bi imao stranicu 1, slijedeći također, treći kvadrat bi bio sa stranicom 2 i tako dalje slijedeći brojeve iz niza. Stranica svakog kvadrata jednaka je zbroju dužina stranica dvaju prethodna kvadrata!



Povuče li se krivulja kao što je to prikazano na slijedećoj slici dobiva se poznata Fibonaccijeva krivulja.



Krivulja nije posebno interesantna po svojim matematičkim svojstvima već po tome što ovaj određeni oblik nailazimo svugdje u prirodi (npr. spiralne galaksije,



Bert Myers ~ X-ray: Nautilus Shell

puževi...).

2.4 *Fibonacci svuda oko nas*

Do sada smo razmatrali Fibonaccijeve brojeve samo u matematičkom smislu. Sa Fibonaccijevim brojevima se susrećemo svaki dan, a da to ni ne opazimo.

Npr.

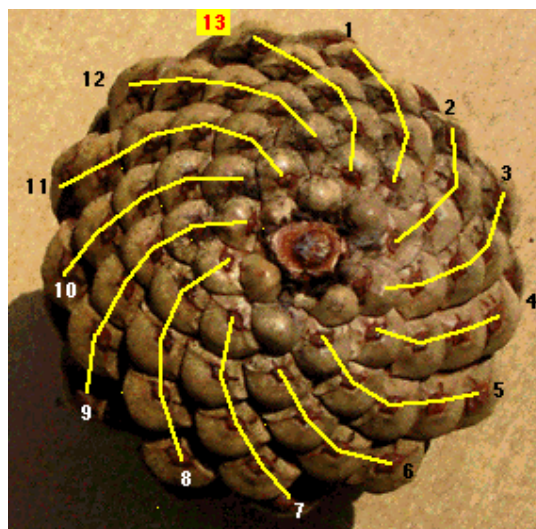
Fibonaccijevi brojevi se pojavljuju na raznim biljkama, od dana klicanja pa sve to cvata. Prilikom rasta mlade biljke, ona se grana i pušta lišće kako bi procesom fotosinteze dobila šećer i ostale supstance koje su joj potrebne u daljnjem grananju. Kada se biljka grana, obično se grana po Fibonaccijevim brojevima.

Jeste li ikada brojali broj latica na nekom cvijetu? Obično ih ima 3, 5 ili 13 no ima ih i sa 55 i 89 – neke porodice tratinčica. Malo koja biljka ima 4 ili 6 latica, zar ne?



Fibonacci se pojavljuje i u sjemenkama biljka – njihovom rasporedu.

Fibonaccijevi brojevi nalaze se kao spinovi (okreti) na češeru, na slici su spinovi popraćeni žutim krivuljama, također ih ima i na voću i povrću. Promotrite slijedeće slike.



Primjeri i mjesta gdje se susrećemo s fibonaccijevim brojevima u prirodi su brojni. Neki primjeri su još jabuka, brokula, ljudi... Promotrimo na tren samu građu ljudi. Ljudi imaju 1 nos, 2 uha, 2 ruke, 2 noge, 5 prstiju i sl. S ovim neuobičajenim pravilnostima biti će nešto više djelu o broju Phi.

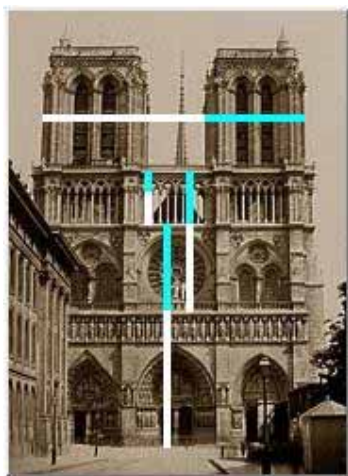
3. Božanska proporcija, zlatni broj, ključ života, ključ svega!

3.1 Božanska proporcija

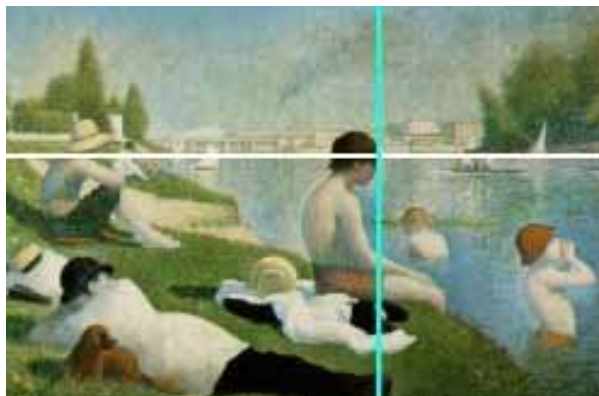
Već u dalekoj prošlosti ljudi su primijetili kako im je najugodnije za oko kada gledaju dvije dužine, kvadrata, pravokutnika ili sl. u omjeru zlatnog reza tj. Phi. Phi je oduvijek postojao kao i matematika, međutim ne zna se kada je PHI točno otkriven i prvi puta primijenjen. Egipćani su primjenjivali omjere bliske zlatnom rezu, no nigdje nije ostao zabilježen u matematičkom ili ikakvom drugom obliku pa se stoga i pretpostavlja da ga nisu ni znali.

Grčki kipar i matematičar Phidias oko 500 godina prije Krista bavio se proučavanjem broja Phi koji je kasnije i primijenio na dizajnu skulptura za Parthenon. Plato je predstavljao Phi kao ključ, temeljnu vezu u fizici svemira.

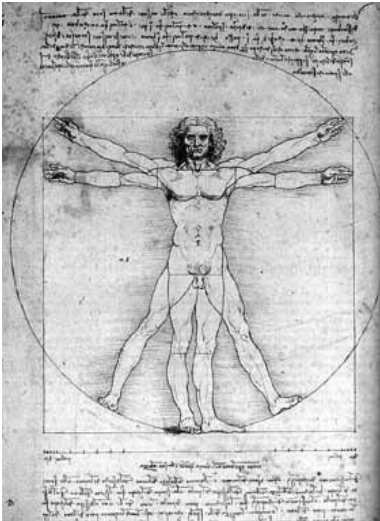
Piramide, Parthenon, crkva Notre Dame, Fibonaccijevi brojevi, Da Vincijeva slika - Posljednja večera i sl. sadrže dužine koje se nalaze u omjeru bliskom zlatnom rezu.



Oko 300 godine prije Krista Euklid iz Aleksandrije je pisao svoje knjige nazvane "Elementa", u kojima, kao učenik Platonove škole govori o pitanjima geometrije i proporcija i precizno govori o podjeli dane dužine tako da se manji dio (minor) odnosi prema većem (major) kao ovaj prema zbroju manjeg i većeg (tj. cjelini).



Stoljeće prije Krista sva znanja starih Grka objedinio je rimski arhitekt Marcus Vitruvius Polio u svom kapitalnom djelu "De architectura libri decem", posvećenom imperatoru Augustu. Pisao je o simetriji hramova te njihove proporcije uspoređuje sa razmjerima čovječjeg tijela. Vitruvije je ucrtao ljudsko tijelo u kružnicu što je mnogo stoljeća kasnije ponovno interpretirao Leonardo Da Vinci.



Kepler, fizičar poznat po čuvenim Keplerovim zakonima rekao je;

"Geometrija ima dva velika blaga, prvo Pitagorin poučak, drugo zlatni rez. Prvo možemo usporediti sa zlatom ali drugo je dragocjen biser."

Phi se pojavljuje svugdje kroz nama poznati svemir. Neki ga nazivaju "Božanska proporcija" jer smatraju da je oznaka Boga.

Ime "Phi" dobiva tek u početku prošlog stoljeća, postoji više teorija zašto Phi. Možda zbog PHIdias-a ili Fibonaccija, jer je Phi ekvivalent za prvo slovo njegovog imena, također PHI

je dvadeset i prvo slovo u Grčkoj abecedi, a broj dvadeset i jedan je Fibonaccijev broj. Phi je praktički svugdje oko nas, cijeli naš svijet je temeljen na njemu, pa i naše kreditne kartice. Poznati arhitekt La Corbusier pokušava standardizirati proporcije, to je i napravio preko Modulor-a koji je trebao predstavljati harmonične odnose prema ljudskoj mjeri, koji su univerzalno primjenljivi u arhitekturi i umjetnosti. Modulor je smješten na moneti od 10CHF.



3.1.1 Zanimljiva svojstva broja PHI te izvod vrijednosti

Broj Phi ima jedno zanimljivo svojstvo, kvadrat broja Phi je jednak broju phi uvećanom za broj jedan. Kada bi to zapisali formulom

$$\text{Phi}^2 = \text{Phi}^1 + \text{Phi}^0$$

$$\text{Phi}^2 - \text{Phi} = 1$$

$$2,618 - 1.618 = 1$$

Zapišemo li prethodnu tvrdnju kao

$$\text{Phi}^2 - \text{Phi} - 1 = 0$$

Izraz svedemo na kvadrat binoma tako da rastavimo zadnji član.

$$\text{Phi}^2 - \text{Phi} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

Prva tri člana čine kvadrat binoma.

$$\text{Phi}^2 - \text{Phi} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\left(\text{Phi} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad / \sqrt{\quad}$$

Korjenujemo

$$\text{Phi} - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\text{Phi} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

u slučaju pozitivnog predznaka u brojniku vrijednost zbroja je iracionalan broj PHI, no ukoliko je predznak negativan dobivamo također iracionalan broj phi tj. PHI - 1.

Poznat je izraz

$$\text{Phi}^n \pm \frac{1}{\text{Phi}^n} \sim \text{cijeli broj!}$$

Ili ako ta dva člana zbrojimo

$$\frac{\text{Phi}^{2n} + 1}{\text{Phi}^n} \sim \text{cijeli broj!}$$

Npr.

Za $n = 9$ prema prethodnom izrazu, koristeći za $\Phi = 1.618$, dobivamo vrijednost od 76.011, međutim kada bi Φ prikazali sa više decimala u rezultatu bi se pojavio broj koji bi sve više i više težio cijelom broju 76 također i za svaki veći n , prirodni broj rezultat je sve više i više određen kao cijeli broj.

3.1.2 Racionalni prikaz broja PHI

Broj Phi možemo prikazati racionalnim brojem u obliku m/n .

$$\Phi = 1$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

Ovakvi razlomci se zovu verižni razlomci. Brojevi m i n su brojevi iz Fibonaccijevog niza, ako bi se niz nastavio dobili bi

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13} \dots$$

3.1.3 Prikaz broja Phi sa Fibonaccijevim brojevima kao koeficijentima

Poznato je da je;

$$\text{Phi}^1 = 0 + 1 * \text{Phi}$$

Isto tako i iz temeljnog identiteta broja Phi znamo da je;

$$\text{Phi}^2 = 1 + 1 * \text{Phi}$$

Treba uočiti da je prvom izrazu slobodan koeficijent nula a i koeficijent 1 jedan od Fibonaccijevih brojeva! Ista stvar je i u prethodnom izrazu, brojevi 1 i 1 su također brojevi Fibonaccijevog niza i to 1. i 2. broj niza. Slijedimo li dalje istu pravilnost uviđamo;

$$\text{Phi}^3 = 1 + 2 * \text{Phi}$$

Izraz za četvrtu, petu bi izgledao;

$$\begin{aligned} \text{Phi}^4 &= 2 + 3 * \text{Phi} \\ \text{Phi}^5 &= 3 + 5 * \text{Phi} \end{aligned}$$

Ako bi smo sada ovu pravilnost prikazali općom formulom ona bi izgledala ovako;

$$\text{Phi}^n = F_{n-1} + F_n * \text{Phi}$$

Dokaz mijenjanja koeficijenata proveo bi se na slijedeći način;
Uzmimo da su a i b dva koeficijenta, neka dva uzastopna broja Fibonaccijevog niza.

$$\text{Phi}^n = a + b * \text{Phi}$$

Prvi slijedeći bi mogli zapisati kao

$$\text{Phi}^{n+1} = a * \text{Phi} + b * \text{Phi}^2$$

Uzmimo u obzir da je $\text{Phi}^2 = \text{Phi} + 1$ i tako ga zapišimo

$$\text{Phi}^{n+1} = a * \text{Phi} + b * (\text{Phi} + 1)$$

Pomnožimo

$$\text{Phi}^{n+1} = a * \text{Phi} + b * \text{Phi} + b$$

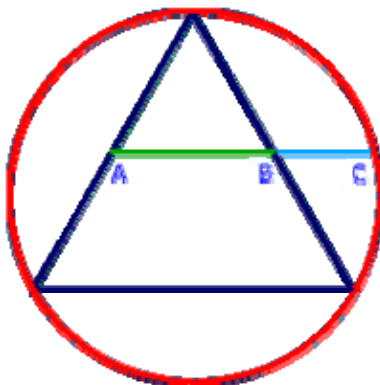
Iz prva dva člana izlučimo broj Phi

$$\text{Phi}^{n+1} = \text{Phi}(a + b) + b$$

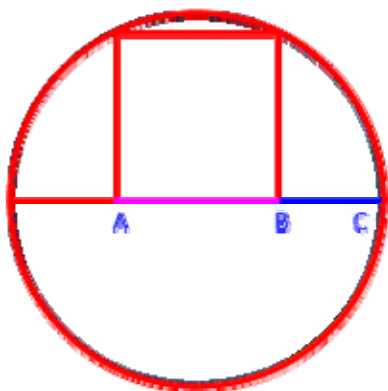
U izrazu $a+b$ može zamijeniti sa slijedećim bojem niza i time potvrditi opću formulu.

3.1.4 Phi likovi i krivulje

Konstrukcijom geometrijskog lika unutar lika u nekim omjerima često daje broj Phi. Na slijedećoj slici je prikazan jednakostraničan trokut kojemu je opisana kružnica.

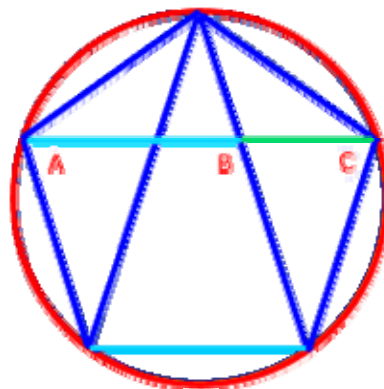


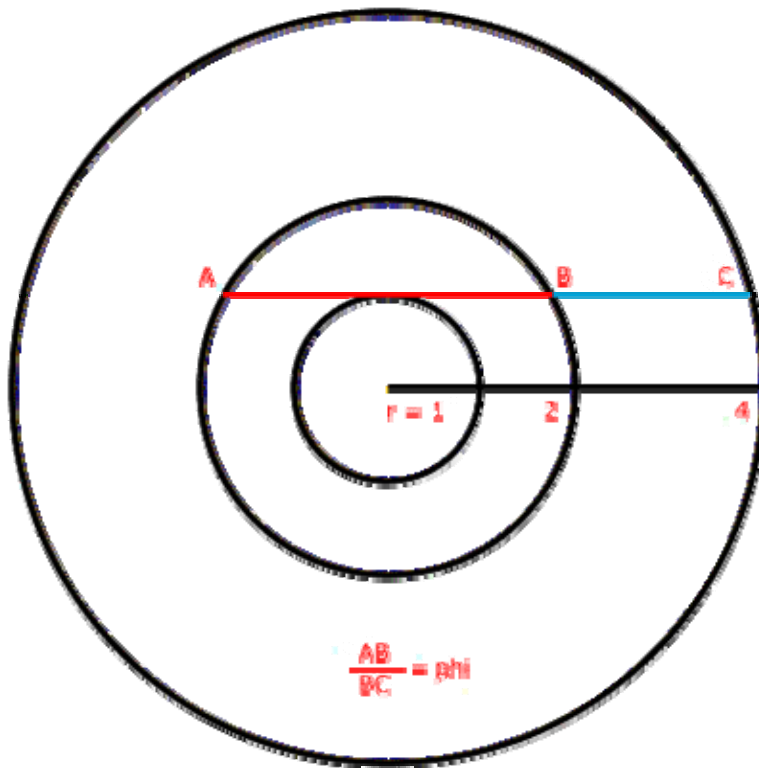
Omjer $|AB|$ i $|BC|$ je jednak Phi. Ovaj model je prvi konstruirao George Odom 1983 godine te iste te godine objavljen u Američkom časopisu "American Mathematics Monthly".



Na crtežu je prikazana kružnica i kvadrat. Ako kroz središte kružnice povučemo dužinu te na njoj konstruiramo takav kvadrat da mu dva vrha diraju kružnicu a druga dva se nalaze na dužini tada je omjer između $|AB|$ i $|BC|$ jednak Phi.

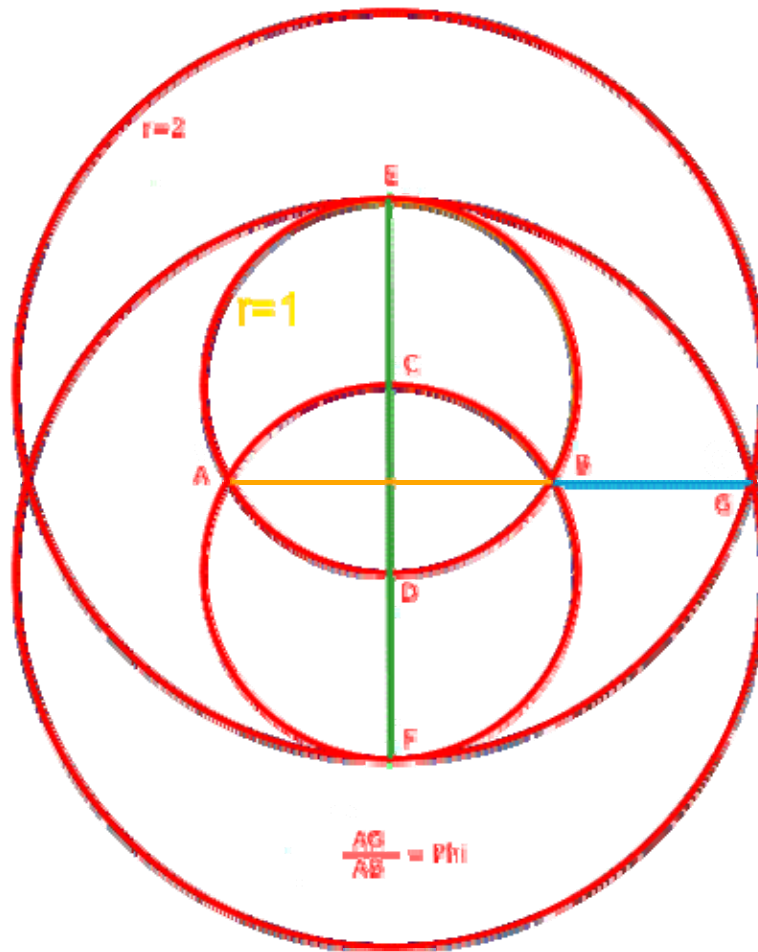
Na crtežu je prikazan pravilni peterokut, njemu opisana kružnica i njegove tri dijagonale. Jedna dijagonala sječe treću u omjeru $|AB| : |BC| = \text{Phi}$.
Dijagonale peterokuta se sijeku u omjeru zlatnog reza, tj. broja PHI!





Još jedan omjer pronađen je između tri koncentrične kružnice sa radijusima $r=1,2,4$ i tangentom na najmanju kružnicu radijusa $r=1$.

Konstruiramo dvije koncentrične kružnice s radijusima $r = 1,2$. Postupak ponovimo te ih dovedemo u poziciju da se sijeku. Dužina $|AC|$ i $|AB|$ su u zlatnom rezu.



Peterokut sa stranicom Phi

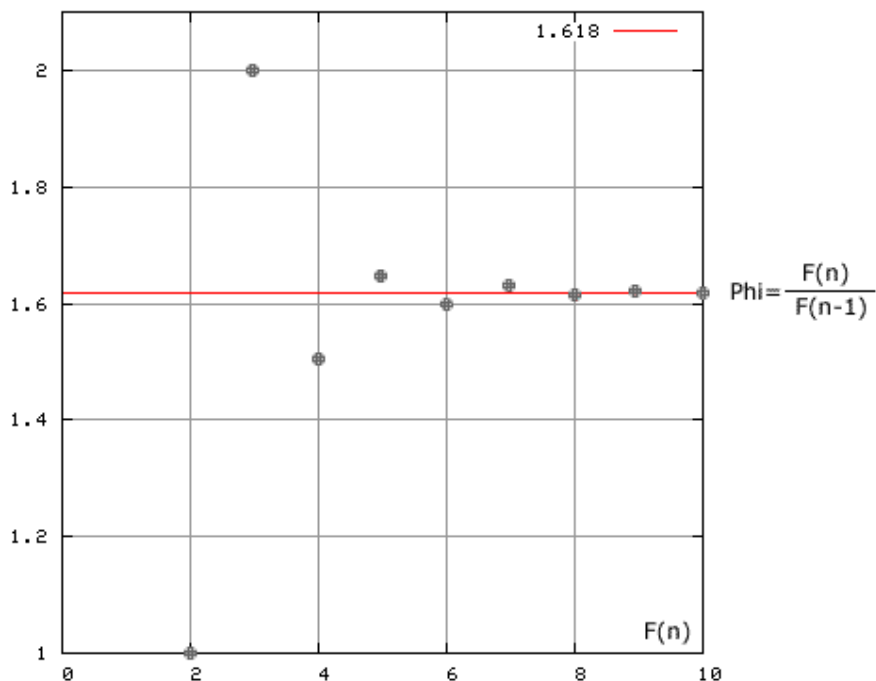


3.2 Fibonaccijevi brojevi i izvod temeljnog svojstva broja Phi

Iznos božanske proporcije, Phi može se dobiti iz Fibonaccijevih brojeva. Promotrite tablicu.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|---|-----|---|-------|---|-----|---|---|---|---|---|---|
| 89 | | 55 | | 34 | | 21 | | 13 | | 8 | | 5 | | 3 | | 2 | | 1 | | 1 | |
| | 1.618 | | 1.617 | | 1.619 | | 1.615 | | 1.625 | | 1.6 | | 1.666 | | 1.5 | | 2 | | 1 | | 1 |

U prvom redu napisani su prvih jedanaest brojeva iz Fibonaccijevog niza i od jedanaestog prema prvom. U drugom redu napisan je broj dobiven dijeljenjem dva broja iz reda poviše. Što se dalje slijede brojevi iz Fibonaccijevog niza te dijele sve točnije i točnije (u više decimala) daju iznos proporcije. Ako bi to prikazali grafički dobili bi slijedeću sliku



Kada bi podijelili četrdeseti i trideset i deveti član Fibonaccijevog niza dobili bi iznos broja Phi točan u 15 decimala.

| | | | |
|----|-------------|-------------------|--------------------|
| 39 | 63,245,986 | 1.618033988749895 | -0.000000000000000 |
| 40 | 102,334,155 | 1.618033988749895 | +0.000000000000000 |

Promotrimo osnovni identitet za dobivanje slijedećeg člana Fibonaccijevog niza.

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Ukoliko cijeli izraz podijelimo sa F_{n+1} dobivamo slijedeće

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_{n+1}} + 1$$

Kako sada znamo da je omjer $n+1$ i n -tog člana Fibonaccijevog niza točno Phi onda je omjer n -tog i $n+1$ člana Fibonaccijevog niza $1/\text{Phi}$.

$$\text{Phi} = \frac{1}{\text{Phi}} + 1 \quad /^2$$

$$\text{Phi}^2 = \text{Phi} + 1$$

I to je način na koji je dobiveno to poznato svojstvo broja Phi.

3.2.1 Pojednostavljenje Binetove formule

Formula je spomenuta u 2. poglavlju kao formula za dobivanje n -tog Fibonaccijevog člana, međutim nju možemo iskazati i preko broja Phi i to na slijedeći način.

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

Npr.

$$F_5 = \frac{\phi^5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^5 \sqrt{5}}{5} = \frac{11.089 * 2.236}{5} = 4.96 \approx 5$$

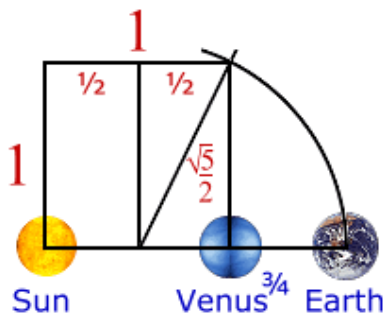
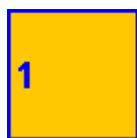
3.3 Zaključak

Phi je sveprisutan u matematici i drugim prirodnim znanostima. Da je Phi prisutan i u svemiru svjedoči svima nama poznati Saturnov prsten koji je podijeljen u omjeru zlatnog reza.



U svemiru je pronađen izvor energije koji ima frekvencije u iznosu broja Phi. Udaljenosti između deset planeta i velikih asteroida teže broju Phi. Merkuru je potrebno vrijeme od približno Φ^3 godina da obiđe Sunce dok je Jupiteru potrebno približno Φ^5 godina da obiđe Sunce ili Veneri, Φ^7 god.

Promotrite slijedeće slike



Iz prethodne slike slijedi da je udaljenost od Sunca do zemlje Phi uz uvjet da je udaljenost od Sunca do Venere jednaka jedan.

Vrijeme u kvantnoj fizici je povezano s PHI. Elektroni imaju masu, okreću se određenom brzinom, imaju naboj. Phi se pojavljuje u gfaktoru elektrona koji nastaje zbog remećenja, rastezanja prostorno-vremenskog kontinuuma zbog okretanja elektrona pri brzini svjetlosti.

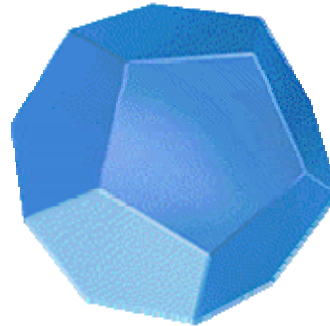
$$gfaktor_e = \frac{-2}{\sin \Phi}$$

Moderna fizika još nije pronašla pravi razlog postojanja gfaktora!

Svemir je sastavljen od beskonačnog broja raznih valova. Od onih mikroskopskih veličina do onih makroskopskih veličina. Svi su oni fazno povezane u beskonačno

mogućnosti. Zvuk, boja, miris itd. Institut za istraživanje niskih frekvencija zemlje (ELFRAD) je pronašao iznimno nisku frekvenciju od 1.618 Hz. Signali su se pojavljivali bez ikakve povezanosti sa bilo kojim izvorom, nisu povezani sa nikakvom anomalijom ili pravilnošću. Isto to vrijedi za amplitudu, intenzitet i vrijeme pojavljivanja signala.

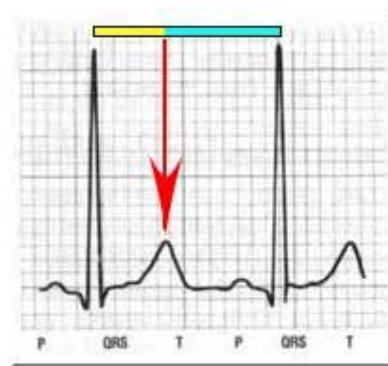
2001 NASA je počela prikupljati podatke za izradu modela svemira. Godine 2003 skupio se tim znanstvenika, fizičara i matematičara koji su na temelju prikupljenih podataka trebali dati konačni pojednostavljeni model svemira. Ekstrapolirani model je ispao dodekaedar. Tijelo koje se sastoji od dvanaest pravilnih peterokuta, a u svakom se vrhu sastaju tri brida i tri stranice.



Koji je posebno zanimljiv zbog prethodno objašnjenih Phi ovisnosti u peterokutu.

Većina glazbenih instrumenata je u zlatnom rezu.

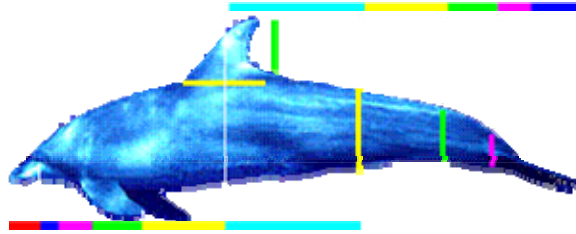
Broj Phi se pojavljuje i na EKGu prilikom slušanja rada srca. Na slici je označen omjer, točka T.



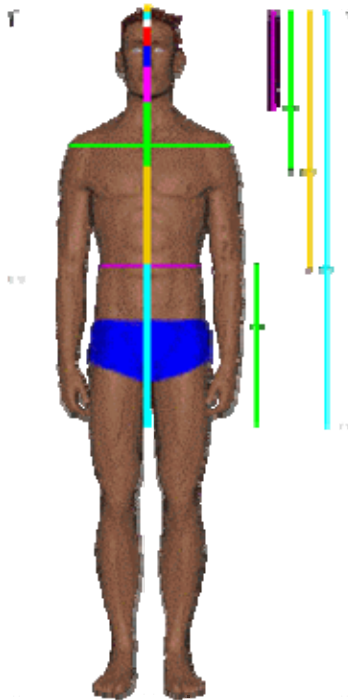
DNA, program života je također temeljen na zlatnoj proporciji. B-DNA spirale se nalaze u zlatnom rezu.

Omjer muških i ženskih pčela u košnici je u zlatnom rezu!

Dosta životinja se nalazi u omjeru zlatnog reza i to na više mjesta! Neke od takvih životinja su leptiri, puževi, dupini, ribe, ptice ...



Nisu samo životinje u zlatnom rezu, već i ljudi!



Udaljenost od ramena do poda i pupka do poda te od ramena do vrška šake i od lakta do šake je zlatni rez. Zlatni omjer se ne nalazi samo na ovim mjestima, već duž ljudskog tijela.